離散伊藤公式とその応用 (数値解析における理論・手法・応用)

藤田, 岳彦; 石村, 直之

数理解析研究所講究録
第 1638 巻 2009 年 130-136

離散伊藤公式とその応用

Discrete Itô Formula and its Applications

一橋大学大学院商学研究科 藤田 岳彦 (Takehiko Fujita)
Graduate School of Commerce and Managements,
Hitotsubashi University
一橋大学大学院経済学研究科 石村 直之 (Naoyuki Ishimura)
Graduate School of Economics,
Hitotsubashi University

1 序論：離散伊藤公式

次の一次元 random walk $\{B_t\}_{t=0,1,2,\cdots}$ $(B_0=0)$ を考える．簡単のため対称性を仮定する．

$$B_t = \sum_{n=1}^{t} Y_n. \tag{1.1}$$

ここで $t=0,1,2,\cdots$ は離散時間, $\{Y_n\}_{n=1,2,\cdots}$ は独立同分布 (i.i.d.) な確率変数,

$$P(Y_n=1)=P(Y_n=-1)=\frac{1}{2}, \qquad n=1,2,\cdots, \tag{1.2}$$

を仮定する．

このとき離散伊藤公式は次のように述べられる (Fujita [3], Fujita and Kawanishi [4]).

Theorem 1 (Fujita and Kawanishi [4]) Suppose f is continuous on $\boldsymbol{R}$, then we have

$$f(B_{t+1})-f(B_t)=\frac{f(B_t+1)-f(B_t-1)}{2}Y_{t+1}+\frac{f(B_t+1)-2f(B_t)+f(B_t-1)}{2}.$$

Furthermore, if f is continuous on $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{N}$, then we have

$$\begin{aligned}f(B_{t+1},t+1)-f(B_t,t)&=\frac{f(B_t+1,t+1)-f(B_t-1,t+1)}{2}Y_{t+1}\\&\quad+\frac{f(B_t+1,t+1)-2f(B_t,t+1)+f(B_t-1,t+1)}{2}\\&\quad+f(B_t,t+1)-f(B_t,t).\end{aligned}$$

定理において f は必ずしも連続である必要はないことを注意しておく.

予想されるように, 離散伊藤公式は強力なものである. 以下ではそのいくつかの応用例を考えたい.

2 Esscher 変換

保険数理においてよく知られている Esscher 変換は

$$Z_t = \frac{e^{\theta B_t}}{E[e^{\theta B_t}]} \qquad (\theta \in \boldsymbol{R})$$

である. $\{Z_t\}_{t=0,1,2,\cdots}$ が martingale となることを, 離散伊藤公式を用いて簡単に示すことができる.

$E[e^{\theta Y_n}] = \cosh\theta$ なので

$$f(x,t) := \frac{e^{\theta x}}{(\cosh\theta)^t}$$

とおく. 定理 1 の第二式において, 右辺第二項以下が消えること, すなわち

$$\frac{1}{2}\{f(x+1,t+1) - 2f(x,t+1) + f(x-1,t+1)\} + f(x,t+1) - f(x,t) = 0$$

を確かめる. これは

$$\frac{1}{(\cosh\theta)^{t+1}}\frac{e^{\theta(x+1)} - 2e^{\theta x} + e^{\theta(x-1)}}{2} + \frac{e^{\theta x}(1-\cosh\theta)}{(\cosh\theta)^{t+1}} = 0$$

より確かに成立する. このとき

$$f(B_{t+1},t+1) - f(B_t,t) = \frac{f(B_t+1,t+1) - f(B_t-1,t+1)}{2}Y_{t+1}$$

なので $\{Z_t\}_{t=0,1,2,\cdots}$ は martingale である.

3 確率制御問題

ここでは価格過程 $\{X_t\}_{t=0,1,2\cdots}$ を, 次の離散確率過程に従うと仮定する.

$$X_{t+1} - X_t = \mu(X_t,t,u_t) + \sigma(X_t,t,u_t)(B_{t+1} - B_t), \qquad t = 0,1,2,\cdots. \tag{3.1}$$

ただし μ, σ は与えられた連続関数とする. また $\{u_t\}_{t=0,1,2,\cdots}$ は制御変数とし, 適合しているとする. このとき次の離散伊藤公式が成り立つ.

Proposition 2 Suppose f is continuous on $\boldsymbol{R}$, then we have

$$\begin{aligned} f(X_{t+1}) - f(X_t) = & \frac{f(X_t+\mu_t+\sigma_t) - f(X_t+\mu_t-\sigma_t)}{2} Y_{t+1} \\ & + f(X_t+\mu_t) - f(X_t) \\ & + \frac{f(X_t+\mu_t+\sigma_t) - 2f(X_t+\mu_t) + f(X_t+\mu_t-\sigma_t)}{2}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

where the use of abbreviations $\mu_t := \mu(X_t, t, u_t)$, $\sigma_t := \sigma(X_t, t, u_t)$ are made. Furthermore, if f is continuous on $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{N}$, then we have

$$\begin{aligned} f(X_{t+1}, t+1) - f(X_t, t) = & \frac{f(X_t+\mu_t+\sigma_t, t+1) - f(X_t+\mu_t-\sigma_t, t+1)}{2} Y_{t+1} \\ & + (f(X_t+\mu_t, t+1) - f(X_t, t+1)) \\ & + \frac{f(X_t+\mu_t+\sigma_t, t+1) - 2f(X_t+\mu_t, t+1) + f(X_t+\mu_t-\sigma_t, t+1)}{2} \\ & + (f(X_t, t+1) - f(X_t, t)). \end{aligned} \tag{3.3}$$

以下では次の記号を用いる.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X f(X_t, t) := & f(X_t+\mu_t, t+1) - f(X_t, t+1) \\ & + \frac{f(X_t+\mu_t+\sigma_t, t+1) - 2f(X_t+\mu_t, t+1) + f(X_t+\mu_t-\sigma_t, t+1)}{2} \\ & + f(X_t, t+1) - f(X_t, t). \end{aligned}$$

解きたい問題は次の最適化問題である.

$$V(x,t) := \sup_{\{u_t\}} J(x, t, u_t), \tag{3.4}$$

すなわち, $V(x,t)$ を実現するような制御変数 $\{u_t\}_{t=0,1,2,\cdots}$ の特徴づけを与えたい. ただし, 正の $T \in \boldsymbol{N}$ に対して

$$J(x,t,u_t) := E^{x,t}\Big[\sum_{k=t}^{T-1} U_1(X_k, k, u_k) + U_2(X_T, T) \Big| X_t = x\Big],$$

とする. ここで U_1, U_2 は効用関数であり, 変数 X_k に関して単調増加, かつ凹であるとする.

結論は次の定理, すなわち離散 Hamilton-Jacobi-Bellman (d-HJB) 方程式 [5] である.

Theorem 3 (d-HJB equation) We have for $t = 0, 1, \cdots, T$,

$$\begin{aligned}
&\sup_{\{u_t\}}\{\mathcal{L}_X^u V(x,t) + U_1(x,t,u_t)\} := \\
&\qquad \sup_{\{u_t\}}\Big\{V(x+\mu_t, t+1) - V(x,t+1) \\
&\qquad\quad + \frac{V(x+\mu_t+\sigma_t, t+1) - 2V(x+\mu_t, t+1) + V(x+\mu_t-\sigma_t, t+1)}{2} \\
&\qquad\quad + V(x,t+1) - V(x,t) + U_1(x,t,u_t)\Big\} = 0 \\
&\quad V(x,T) = U_2(x,T),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

where we have put

$$\mu_t := \mu(X_t, t, u_t), \qquad \sigma_t := \sigma(X_t, t, u_t).$$

いわゆる verification theorem も成立する. 結果のみ述べておく.

Theorem 4 Let $W(x,t)$ solves the discrete Hamilton-Jacobi-Bellman equation (3.5):

$$\sup_{\{u_t\}}\{\mathcal{L}_X^u W(x,t) + U_1(x,t,u_t)\} = 0,$$
$$W(x,T) = U_2(x,T).$$

Then we have

$$W(x,t) \geq J(x,t,u_t), \tag{3.6}$$

for every $x \in \boldsymbol{R}$, $t = 0, 1, 2, \cdots, T$ and adapted $\{u_t\}$. Furthermore, if for every $x \in \boldsymbol{R}$, $t = 0, 1, 2, \cdots, T$ there exists a $\{u_t^*\} \in \mathcal{A}$ with

$$u_k^* \in \arg\sup_{\{y_t\}}(\mathcal{L}_X^u W(k, X_k^*) + U_1(x, X_k^*, u_k)),$$

for every $t \leq k \leq T$, where X_k^* is the controlled process corresponding to u_k^* through (3.1), then we obtain

$$W(x,t) = V(x,t) = J(x,t,u_t).$$

4 例

d-HJB 方程式の解法例を与える.

Example 5 (3.1) において $\mu \equiv 0$ とし, 正の σ に対して $\sigma(X,t,u) = \sigma u X$ とする. 効用関数は $U_1 \equiv 0$ および $U_2 = \sqrt{x}$ とする. このとき, d-HJB 方程式 (3.5) は次のようになる.

$$\begin{aligned}\sup_{\{u_t\}} \Big\{ &\frac{V((1+\sigma u_t)x, t+1) - 2V(x,t+1) + V((1-\sigma u_t)x, t+1)}{2} \\ &+ V(x,t+1) - V(x,t) \Big\} = 0 \\ V(x,T) &= \sqrt{x}.\end{aligned} \tag{4.1}$$

次の形の解を探す.

$$V(x,t) = g(t)\sqrt{x} \tag{4.2}$$

ただし $g(T) = 1$. (4.2) を (4.1) に代入すれば

$$\sup_{\{u_t\}} \left\{ g(t+1)\frac{\sqrt{(1+\sigma u_t)x} + \sqrt{(1-\sigma u_t)x}}{2} - g(t)\sqrt{x} \right\} = 0$$

を得る.

この最適化問題は解ける. 結果は, 最適戦略が $u_t \equiv 0$, よって $g(t) \equiv 1$ および $V(x,t) \equiv \sqrt{x}$ となる.

Example 6 (3.1) において $\mu(X,t,u) = u$ かつ $\sigma(X,t,u) = \sigma u$, ただし $\sigma > 1$ とする. 効用関数は先の例と同じ $U_1 \equiv 0$ および $U_2 = \sqrt{x}$ とする. よって d-HJB 方程式 (3.5) は次となる.

$$\begin{aligned}\sup_{\{u_t\}\in\mathcal{A}} \Big\{ &V(x+u_t, t+1) - V(x,t+1) + \\ &\frac{V(x+u_t+\sigma u_t, t+1) - 2V(x+u_t,t+1) + V(x+u_t-\sigma u_t, t+1)}{2} \\ &+ V(x,t+1) - V(x,t) \Big\} = 0 \\ V(x,T) &= \sqrt{x}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

次の形の解を探す.

$$V(x,t) = g(t)\sqrt{x} \tag{4.4}$$

ただし $g(T) = 1$. (4.4) を (4.3) に代入すれば

$$\sup_{\{u_t\}\in\mathcal{A}} \left\{ g(t+1)\frac{\sqrt{x+(1+\sigma)u_t} + \sqrt{x-(\sigma-1)u_t}}{2} - g(t)\sqrt{x} \right\} = 0$$

となる．この最適化問題も解くことができる．最大となるのは，制御変数が

$$u_t = \frac{2}{\sigma^2 - 1} x \tag{4.5}$$

のときである．(4.5) を (4.3) に再度代入すれば

$$g(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{T-t} \left(\sqrt{\frac{\sigma+1}{\sigma-1}} + \sqrt{\frac{\sigma-1}{\sigma+1}}\right)^{T-t}$$

を得る．対応する $V(x,t)$ も求めることができる．

5 おしまいに

離散伊藤公式とその応用について考察した．簡単のため対称な random walk を考察した．もちろん拡張は可能である．たとえば

$$P(Y_n = a) = p, \qquad P(Y_n = -b) = 1 - p.$$

ただし $a,b > 0$ および $0 < p < 1$ とする．このとき離散伊藤公式は

$$\begin{aligned} f(B_{t+1}) - f(B_t) = {} & \frac{f(B_t + a) - f(B_t - b)}{a+b} Y_{t+1} \\ & + \frac{bf(B_t + a) - (a+b)f(B_t) + af(B_t - b)}{a+b} \end{aligned}$$

となる．

離散伊藤公式は離散確率過程において基本的であるため，ここで述べた例以外にも応用例は考えられる．それらについては別の機会に述べたい．

参考文献

[1] T. Björk: *Arbitrage Theory in Continuous Time*, 2nd ed., Oxford Univ. Press, Oxford, 2004.

[2] D. Duffie: *Security Markets*, Academic Press, London, 1988.

[3] T. Fujita: *Introduction to the Stochastic Analysis for Financial Derivatives (Finance no Kakuritsu-Kaiseki Nyumon)*, Kodan-shya, Tokyo, 2002 (in Japanese).

[4] T. Fujita and Y. Kawanishi: A proof of Itô's formula using a discrete Itô's formula, *Stud. Scienti. Math. Hungarica*, **45** (2008), 125–134.

[5] N. Ishimura and Y. Mita; A note on the discrete-portfolio optimization, preprint, submitted (2008).

[6] R. Korn and E. Korn: *Option Pricing and Portfolio Optimization*, Graduate Studies in Mathematics 31, American Mathematical Society, Rhode Island, 2001.

[7] T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, and J. Teugels: *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley & Sons, New York, 1998.